DATOS

1.36) $S_1 = \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\}$ y $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^6 : Ax = 0\}$

$v_1 = [1 \;\; 1 \;\; -3 \;\; 7 \;\; 9 \;\; 3]^T$

$v_2 = [-1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; 3]^T$

$v_3 = [1 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 6 \;\; 4 \;\; 1]^T$

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 10 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar T de $\mathbb{R}^6$ tal que $S_1 \oplus T = S_2 \oplus T = \mathbb{R}^6$.

$\mathbb{R}^6$ es suma directa de S_1 y T y de S_2 y T si:

1- $\mathbb{R}^6 = S_1 + T$ y $\mathbb{R}^6 = S_2 + T$

2- $S_1 \cap T = \{0\}$ y $S_2 \cap T = \{0\}$

Primero busco bases de S_1 y de S_2.

Busco base de S_1, poniendo sus vectores como filas, si ninguna se anula al triangular, es LI.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 7 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 \to F_1 + F_2 \\ F_3 \to F_1 - F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} F_3 \to F_2 - 2F_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

No se anuló ninguna fila, son LI, es base $\Rightarrow \boxed{B_{S_1} = \{v_1, v_2, v_3\}}$

$\text{Dim}(S_1) = 3$

Busco base de S_2:

$$\begin{pmatrix} 11 & 10 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F2 \to 11F2 + 2F1 \\ F3 \to 11F3 + 2F1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 11 & 10 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 20 & 13 & -2 & 9 & -11 \\ 0 & -35 & -9 & -2 & -2 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 20F3 + 35F2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 10 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 20 & 13 & -2 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & 275 & -110 & 275 & -165 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones teniendo en cuenta que: $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^6 : Ax = 0\}$

$$\begin{cases} 11x_1 + 10x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 & \text{I} \\ 20x_2 + 13x_3 - 2x_4 + 9x_5 - 11x_6 = 0 & \text{II} \\ 275x_3 - 110x_4 + 275x_5 - 165x_6 = 0 & \text{III} \end{cases}$$

de III $\to$ $x_3 = \dfrac{110x_4 - 275x_5 + 165x_6}{275} \to \left[x_3 = \dfrac{2}{5}x_4 - x_5 + \dfrac{3}{5}x_6 \right]$

en II $\to$ $20x_2 + 13.\left(\dfrac{2}{5}x_4 - x_5 + \dfrac{3}{5}x_6\right) - 2x_4 + 4x_5 - 11x_6 = 0 \to$

$\to 20x_2 + \dfrac{26}{5}x_4 - 13x_5 + \dfrac{39}{5}x_6 - 2x_4 + 4x_5 - 11x_6 = 0 \to$

$\to \dfrac{16}{5}x_4 - 9x_5 - \dfrac{16}{5}x_6 + 20x_2 = 0 \to$

$\to x_2 = \dfrac{-16x_4}{5.20} + \dfrac{9}{20}x_5 + \dfrac{16}{5.20} \to \left[x_2 = \dfrac{-4}{25}x_4 + \dfrac{9}{20}x_5 + \dfrac{4}{25}x_6 \right]$

en I $\rightarrow 11x_1 + 10\cdot\left(-\frac{4}{25}x_4 + \frac{9}{20}x_5 + \frac{4}{25}x_6\right) + \left(\frac{2}{5}x_4 - x_5 + \frac{3}{5}x_6\right) - x_4 - x_5 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 11x_1 - \frac{40}{25}x_4 + \frac{90}{20}x_5 + \frac{40}{25}x_6 + \frac{2}{5}x_4 - x_5 + \frac{3}{5}x_6 - x_4 - x_5 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 11x_1 - \frac{11}{5}x_4 + \frac{5}{2}x_5 + \frac{11}{5}x_6 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{11}{55}x_4 - \frac{5}{2}x_5 - \frac{11}{5}x_6 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{x_1 = \frac{x_4}{5} - \frac{5}{2}x_5 - \frac{11}{5}x_6}$

Por lo tanto con un punto genérico queda:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(\frac{x_4}{5} - \frac{5}{2}x_5 - \frac{11}{5}x_6; -\frac{4}{25}x_4 + \frac{9}{20}x_5 + \frac{4}{25}x_6; \frac{2}{5}x_4 - x_5 + \frac{3}{5}x_6; \rightarrow\right.$

$\rightarrow \left. x_4; x_5; x_6\right)$

$\rightarrow x_4\cdot\left(\frac{1}{5}; \frac{-4}{25}; \frac{2}{5}; 1; 0; 0\right) + x_5\cdot\left(\frac{-5}{2}; \frac{9}{20}; -1; 0; 1; 0\right) + x_6\cdot\left(\frac{-11}{5}; \frac{4}{25}; \frac{3}{5}; 0; 0; 1\right)$

Una base de S2 por lo tanto es:

$B_{S2} = \left\{\left(\frac{1}{5}; \frac{-4}{25}; \frac{2}{5}; 1; 0; 0\right); \left(\frac{-5}{2}; \frac{9}{20}; -1; 0; 1; 0\right); \left(\frac{-11}{5}; \frac{4}{25}; \frac{3}{5}; 0; 0; 1\right)\right\}$

o multiplicando por 5:

$\boxed{B_{S2} = \left\{\left(1; -\frac{4}{5}; 2; 5; 0; 0\right); \left(\frac{-25}{2}; \frac{9}{4}; -5; 0; 5; 0\right); \left(-11; \frac{4}{5}; 3; 0; 0; 5\right)\right\}}$

$\mathrm{Dim}(S2) = 3$

Como $Dim(S_1) = Dim(S_2) = 3$, el T que debo hallar tiene que ser de dimensión 3 también p/que la suma directa me de $\mathbb{R}^6$ ($dim(\mathbb{R}^6) = 6$). Por ejemplo podría ser:

$$\boxed{B_T = \{(100000);(010000);(001000)\}}$$

Verifico si $S_1 + T = \mathbb{R}^6$

Uno sus bases y veo si son LI poniendolos en filas y triangulando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 7 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cancel{F_2 \to F_1+F_2} \\ \cancel{F_3 \to F_1-F_3} \\ \cancel{F_4 \to F_1-F_4} \\ \\ \\ \end{array}$$

INTERCAMBIO LAS ULTIMAS 3 FILAS LLEVANDOLAS ARRIBA

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 7 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ F_4 \to F_1-F_4 \\ F_5 \to F_1+F_5 \\ F_6 \to F_1-F_6 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -7 & -9 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ F_4 \to F_2+F_4 \\ F_5 \to F_2-F_5 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ F_4 \to 3F_3-F_4 \\ F_5 \to F_3+F_5 \\ F_6 \to F_3-F_6 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ F_5 \to F_4-7F_5 \\ F_6 \to 6F_4-7F_5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 11 \end{pmatrix} F6 \to 13F5 - F6 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 301 \end{pmatrix}$$

No ~~se~~ anuló ninguna fila al triangular por lo que la ~~base~~ unión de las dos bases (de $S1$ y de T) son LI.

$\hookrightarrow$ $S1 + T = \mathbb{R}^6$ porque $\dim(S1+T) = \dim(\mathbb{R}^6)$

y como $\dim(S1+\cancel{T}) = \dim(S1) + \dim(\cancel{T}) - \dim(S1 \cap T)$

esto quiere decir que $S1 \cap T = \{0\}$.

Por lo tanto $\boxed{S1 \oplus T = \mathbb{R}^6}$

Ahora verifico si $S2+T = \mathbb{R}^6$.

Uno sus bases y veo si son LI.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4/5 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ -25/2 & 9/4 & -5 & 0 & 5 & 0 \\ -11 & 4/5 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ F4 \to F1 - F4 \\ F5 \to \frac{25}{2}F1 + F5 \\ F6 \to 11F1 + F6 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 9/4 & -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ F4 \to 4/5\,F2 - F4 \\ F5 \to 9/4\,F2 - F5 \\ F6 \to 4/5\,F2 - F6 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ F4 \to 2F3 - F4 \\ F5 \to 5F3 - F5 \\ F6 \to 3F3 + F6 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

No se anuló ninguna fila por lo que la unión de los dos bases (de S_2 y de T) son LI.

$\rightarrow S_2 + T = \mathbb{R}^6$ porque $\text{Dim}(S_2+T) = \text{Dim}(\mathbb{R}^6)$

y como $\text{Dim}(S_2+T) = \text{Dim}(S_2) + \text{Dim}(T) - \text{Dim}(S_2 \cap T)$

Entonces quiere decir que $S_2 \cap T = \{0\}$

Por lo tanto $\boxed{S_2 \oplus T = \mathbb{R}^6}$

y $T = \text{gen}\left\{[1\,0\,0\,0\,0\,0]^T, [0\,1\,0\,0\,0\,0]^T, [0\,0\,1\,0\,0\,0]^T\right\}$